Правительство Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Санкт-Петербургский государственный университет»
Кафедра прикладной кибернетики

Лежнина Юлия Геннадьевна

Аттракторы и классические определения неустойчивости

Дипломная работа

Допущена к защите
Заведующий кафедрой:
д. ф.-м. н., профессор Г. А. Леонов
Научный руководитель:
д. ф.-м. н., профессор Г. А. Леонов
Рецензент:
д. ф.-м. н., профессор А. Л. Тулупьев

Санкт-Петербург
2016

SAINT PETERSBURG STATE UNIVERSITY
Department of Applied Cybernetics

Lezhnina Yulia

ATTRACTORS AND CLASSICAL STABILITY THEORY

Graduation Thesis

Admitted for defence

Head of Department:
Doctor of Physics and Mathematics,
Professor Leonov G. A.

Scientific Supervisor:
Doctor of Physics and Mathematics,
Professor Leonov G. A.

Reviewer:
Doctor of Physics and Mathematics,
Professor Tulupyev A. L.

Saint Petersburg
2016

Содержание

Введение

Основоположникам геометрической (качественной) теории дифференциальных уравнений и теории устойчивости движения А. Пуанкаре [8, 9], Н. Е. Жуковскому [5], А. М. Ляпунову [1, 6], Дж. Биркгофу[7] принадлежат методы исследования и фундаментальные результаты, положившие начало дальнейшему развитию в России и за рубежом.

В то время как теория устойчивости Ляпунова достигла высокого уровня развития, теория прочности Жуковского не получила должного развития и многие вопросы в ней оказались открытыми.

Кроме вопроса о структуре аттракторов, интенсивному изучению был подвергнут вопрос о зависимости аттракторов от возмущения системы. Считается, что определяющим свойством странного аттрактора является чувствительность его траекторий по отношению к начальным данным. В этой работе эти проблемы рассматриваются с точки зрения классической теории устойчивости движения.

Многие известные исследователи предполагают, что такая чувствительность по отношению к начальным данным адекватна неустойчивости по Ляпунову [2, 3]. Однако это справедливо только для дискретных динамических систем. Для непрерывных систем необходимо вспомнить понятие неустойчивости по Жуковскому. Один из основателей современной аэродинамики, выдающийся русский учёный Николай Егорович Жуковский ввёл своё понятие устойчивости движения в 1882 году [4, 5], на десять лет раньше публикации исследований А. М. Ляпунова (1892 год [1]). Понятие неустойчивости по Жуковскому адекватно для чувствительности траекторий по отношению к начальным данным для непрерывных динамических систем.

В этой работе были рассмотрены взаимосвязь основных понятий теории устойчивости, а также примеры динамических систем, неустойчивых в одном смысле, но имеющие устойчивость в другом.

Текст данной работы организован следующим образом. В первом разделе вводятся такие понятия, как динамическая система и аттрактор, даётся классификация аттракторов, а также описаны необходимые определения классической теории устойчивости, такие как устойчивость по Ляпунову, по Красовскому, асимптотическая и экспоненциальная устойчивость, устойчивость траекторий по Жуковскому и по Пуанкаре. В следующих двух разделах представлены обязательные теоремы, демонстрирующие связь основных понятий, описанных в предыдущем разделе, и приведены примеры, имеющие различные характеристики по основным понятиям классической теории устойчивости. В последнем разделе описан основной метод, используемый при исследовании устойчивости (или неустойчивости) траекторий системы.

1. Предварительные сведения

В этом разделе мы в основном следуем книгам и обзорам [1, 11, 17-20].

1.1. Определения аттракторов

Аттрактор динамической системы — это притягивающее замкнутое инвариантное множество в её фазовом пространстве. Рассмотрим динамические системы, порождённые дифференциальными

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \qquad t \in \mathbb{R}^1,\ x \in \mathbb{R}^n, \tag{1.1}$$

и разностными

$$x(t+1) = f(x(t)), \qquad x \in \mathbb{Z}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{1.2}$$

уравнениями. Здесь $\mathbb{R}^n$ — евклидово пространство, $\mathbb{Z}$ — множество целых чисел, $f(x)$ — вектор-функция: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

Определение 1.1. *Будем говорить, что уравнение (1.1) или (1.2) порождает динамическую систему, если по любому начальному состоянию* $x_0 \in \mathbb{R}^n$ *однозначно определена траектория* $x(t, x_0)$ *при* $t \in [0, +\infty)$.

Здесь $x(0, x_0) = x_0$.

Хорошо известно, что в рассматриваемом случае для решений системы (1.1) справедливо следующее полугрупповое свойство

$$x(t+s, x_0) = x(t, x(s, x_0)) \tag{1.3}$$

при всех $t \geq 0,\ s \geq 0$.

Динамическую систему, порожденную уравнением (1.1), будем называть непрерывной, а уравнением (1.2) — дискретной динамической системой.

Введем определения аттракторов, следуя в основном работе [10].

Определение 1.2. *Будем говорить, что* K *инвариантно, если* $x(t,K)=K, \ \ \forall t\geq 0.$

Здесь

$$x(t,K)=\{x(t,x_0)\big|x_0\in K\}.$$

Определение 1.3. *Будем говорить, что инвариантное множество* K *является локально притягивающим, если для некоторой* ε*-окрестности этого множества* $K(\varepsilon)$ *выполнено соотношение*

$$\lim_{t\to+\infty}\rho(K,x(t,x_0)=0, \qquad \forall x_0\in K(\varepsilon).$$

Здесь $\rho(K,x)$ — расстояние от точки x до множества K, которое определяется по формуле

$$\rho(K,x)=\inf_{z\in K}|z-x|.$$

$|\cdot|$ — евклидова норма в $\mathbb{R}^n$, $K(\varepsilon)$ — множество точек x, для которых $\rho(K,x)<\varepsilon$.

Определение 1.4. *Будем говорить, что инвариантное множество* K *является глобально притягивающим, если*

$$\lim_{t\to+\infty}\rho(K,x(t,x_0))=0, \qquad \forall x_0\in\mathbb{R}^n.$$

Определение 1.5. *Будем говорить, что инвариантное множество* K *является равномерно локально притягивающим, если для некоторой его* ε*-окрестности* $K(\varepsilon)$ *и для любых числа* $\delta>0$ *и ограниченного множества* B *существует число* $t(\delta,B)>0$ *такое, что*

$$x(t,B\cap K(\varepsilon))\subset K(\delta), \qquad \forall t\geq t(\delta,B).$$

Здесь

$$x(t,B\cap K(\varepsilon))=\{x(t,x_0)\big|x_0\in(B\cap K(\varepsilon))\}.$$

Определение 1.6. *Будем говорить, что инвариантное множество K является равномерно глобально притягивающим, если для любых числа $\delta > 0$ и ограниченного множества $B \in \mathbb{R}^n$ существует число $t(\delta, B) > 0$ такое, что*

$$x(t, B) \subset K(\delta), \qquad \forall t \geq t(\delta, B).$$

Определение 1.7. *Будем говорить, что инвариантное множество K устойчиво по Ляпунову, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует число $\delta > 0$ такое, что*

$$x(t, K(\delta)) \subset K(\varepsilon), \qquad \forall t \geq 0.$$

Заметим, что, если K состоит из единственной траектории, то последнее определение совпадает с классическим определением устойчивости решения по Ляпунову. Если такое K является также локально притягивающим, то имеет место асимптотическая устойчивость в смысле Ляпунова.

Определение 1.8. *Будем говорить, что K — аттрактор, если K является инвариантным, замкнутым, локально притягивающим множеством.*

Определение 1.9. *Будем говорить, что K — глобальный аттрактор, если K является инвариантным, замкнутым, глобально притягивающим множеством.*

Определение 1.10. *Будем говорить, что K — B-аттрактор, если K является инвариантным, замкнутым, равномерно локально притягивающим множеством.*

Определение 1.11. *Будем говорить, что K — глобальный B-аттрактор, если K является инвариантным, замкнутым, равномерно глобально притягивающим множеством.*

1.2. Основные определения в классической теории устойчивости движения

Рассмотрим систему

$$\frac{dx}{dt} = F(x,t), \quad t \in \mathbb{R}^1, \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{1.4}$$

где $F(x,t)$ – непрерывная вектор-функция и систему

$$x(t+1) = F(x(t),t), \quad t \in \mathbb{Z}, \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{1.5}$$

Обозначим через $x(t,t_0,x_0)$ решение системы (1.4) или системы (1.5) с начальными данными t_0, x_0 :

$$x(t_0,t_0,x_0) = x_0.$$

Определение 1.12. *Решение $x(t,t_0,x_0)$ называется устойчивым по Ляпунову, если для любых $\varepsilon > 0$ и $t_0 \geq 0$ существует число $\delta(\varepsilon,t_0)$ такое, что*

1) все решения $x(t,t_0,x_0)$, удовлетворяющие условию

$$|x_0 - y_0| \geq \delta\,,$$

определены при $t \geq t_0$,

2) для этих решений справедливо неравенство

$$|x(t,t_0,x_0) - x(t,t_0,y_0)| \leq \varepsilon, \quad \forall t \geq t_0.$$

Если $\delta(\varepsilon,t_0)$ не зависит от t_0, то устойчивость по Ляпунову называется равномерной.

Определение 1.13. *Решение $x(t,t_0,x_0)$ называется асимптотически устойчивым по Ляпунову, если оно устойчиво по Ляпунову и для любого $t_0 \geq 0$ существует число $\Delta(t_0) > 0$ такое, что решение $x(t,t_0,x_0)$, удовлетворяющее условию $|x_0 - y_0| \leq \Delta$ обладает свойством*

$$\lim_{t\to+\infty} |x(t,t_0,x_0) - x(t,t_0,y_0)| = 0.$$

Определение 1.14. *Решение* $x(t,t_0,x_0)$ *называется устойчивым по Красовскому, если существуют такие положительные числа* $\delta(t_0)$ *и* $R(t_0)$, *что для любого* y_0, *удовлетворяющего условию* $|x_0-y_0|\le\delta(t_0)$, *решение* $x(t,t_0,x_0)$ *определено при всех* $t\ge t_0$ *и выполнено неравенство*

$$|x(t,t_0,x_0)-x(t,t_0,y_0)|\le R(t_0)|x_0-y_0|,\qquad \forall t\ge t_0.$$

Если δ *и* R *не зависят от* t_0, *то устойчивость по Красовскому называется равномерной.*

Определение 1.15. *Решение* $x(t,t_0,x_0)$ *называется экспоненциально устойчивым, если существуют такие положительные числа* $\delta(t_0)$, $R(t_0)$ *и* $\alpha(t_0)$, *что для любого* y_0, *удовлетворяющего условию* $|x_0-y_0|\le\delta(t_0)$, *решение* $x(t,t_0,x_0)$ *определено при всех* $t\ge t_0$ *и выполнено неравенство*

$$|x(t,t_0,x_0)-x(t,t_0,y_0)|\le R(t_0)\exp\left(-\alpha(t_0)(t-t_0)\right)|x_0-y_0|,\ \ \forall t\ge t_0.$$

Если δ, R *и* α *не зависят от* t_0, *то экспоненциальную устойчивость называют равномерной.*

Перейдём теперь к рассмотрению динамических систем (1.1) и (1.2).

Введём следующее обозначение

$$L^+(x_0)=\left\{x(t,x_0)|t\in[0,+\infty)\right\}.$$

Определение 1.16. *Траектория* $x(t,x_0)$ *динамической системы называется устойчивой по Пуанкаре (или орбитально устойчивой), если для любого числа* $\varepsilon>0$ *существует число* $\delta(\varepsilon)>0$ *такое, что при всех* y_0, *удовлетворяющих неравенству* $|x_0-y_0|\le\delta(\varepsilon)$, *выполнено соотношение*

$$\rho(L^+(x_0),x(t,y_0))\le\varepsilon,\qquad \forall t\ge 0.$$

Если, кроме того, для некоторого числа δ_0 *и всех* y_0, *удовлетворяющих неравенству* $|x_0 - y_0| \le \delta_0$, *выполнено соотношение*

$$\lim_{t\to+\infty} \rho(L^+(x_0), x(t, y_0)) = 0,$$

то говорят, что траектория $x(t, x_0)$ *асимптотически устойчива по Пуанкаре (или асимптотически орбитально устойчива).*

Заметим, что приведённом выше определении для непрерывных динамических систем $t \in \mathbb{R}^1$, а для дискретных динамических систем $t \in \mathbb{Z}$.

Введем теперь определение устойчивости по Жуковскому для непрерывных динамических систем. Для этого потребуется рассмотрение следующего множества гомеоморфизмов:

$$Hom = \{\tau(\cdot) | \tau : [0, +\infty) \to [0, +\infty), \tau(0) = 0\}.$$

Функции $\tau(t)$ из множества Hom будут играть роль перепараметризации времени для траектории системы (1.1).

Определение 1.17. *Траектория* $x(t, x_0)$ *системы (1.1) называется устойчивой по Жуковскому, если для любого числа* $\varepsilon > 0$ *существует число* $\delta(\varepsilon) > 0$ *такое, что для любого вектора* y_0, *удовлетворяющего неравенству* $|x_0 - y_0| \le \delta(\varepsilon)$, *найдется функция* $\tau(\cdot) \in Hom$, *при которой выполнено неравенство*

$$|x(t, x_0) - x(\tau(t), y_0)| \le \varepsilon, \qquad t \ge 0.$$

Если, кроме того, для некоторого числа $\delta_0 > 0$ *и любого* y_0 *из шара* $\{y \big| |x_0 - y_0| \le \delta_0\}$ *найдется функция* $\tau(\cdot) \in Hom$, *при которой выполнено соотношение*

$$\lim_{t\to+\infty} |x(t, x_0) - x(\tau(t), y_0)| = 0,$$

то будем говорить, что траектория $x(t, x_0)$ *асимптотически устойчива по Жуковскому.*

Другими словами, устойчивость по Жуковскому — это устойчивость по Ляпунову при подходящей перепараметризации каждой из возмущенных траекторий.

По определению неустойчивостью по Ляпунову (по Красовскому, по Пуанкаре, по Жуковскому) считается отрицание соответствующего вида устойчивости.

2. Взаимоотношения между основными понятиями устойчивости

Сформулируем следующие очевидные утверждения.

Предложение 2.1. *Для непрерывных динамических систем из устойчивости по Ляпунову следует устойчивость по Жуковскому, а из устойчивости по Жуковскому следует устойчивость по Пуанкаре.*

Предложение 2.2. *Для дискретных динамических систем из устойчивости по Ляпунову следует устойчивость по Пуанкаре.*

Предложение 2.3. *Для состояний равновесия все введенные выше определения Ляпунова, Жуковского и Пуанкаре эквивалентны.*

Предложение 2.4. *Для периодических траекторий дискретных систем эквивалентны определения устойчивости по Ляпунову и по Пуанкаре.*

Доказательство. Пусть периодическая траектория дискретной системы устойчива по Пуанкаре. Выберем ε-окрестность $U(\varepsilon, L^+(x_0))$ периодической траектории $L^+(x_0)$ так, чтобы

$$U(\varepsilon, u) \cap U(\varepsilon, z) = \emptyset. \tag{2.1}$$

для любых точек $u \in L^+(x_0), z \in L^+(x_0), u \neq z$. Здесь $\emptyset$ – пустое множество.

Рассмотрим y_0 из δ-окрестности точки x_0 и соединим x_0 и y_0 отрезком $x_0 + \gamma(y_0 - x_0), \gamma \in [0, 1]$.

Из непрерывности $f(x)$, устойчивости по Пуанкаре и соотношения (2.1) следует, что

$$x(t, x_0 + \gamma(y_0 - x_0)) \in U(\varepsilon(x(t, x_0)), \qquad \forall t \geq 0, \quad \forall \gamma \in [0, 1]. \tag{2.2}$$

Включение (2.2) при $\gamma = 1$ означает устойчивость по Ляпунову траектории $x(t, x_0)$. Отсюда следует эквивалентность определений устойчивости по Пуанкаре и по Ляпунову периодических траекторий дискретных систем. $\square$

Аналогично доказывается эквивалентность асимптотической устойчивости по Пуанкаре и по Ляпунову периодических траекторий дискретных систем.

Предложение 2.5. *Для периодических траекторий непрерывных систем эквивалентны определения устойчивости по Пуанкаре и по Жуковскому.*

Доказательство. Пусть периодическая траектория непрерывной системы устойчива по Пуанкаре. Выберем ε-окрестность $U(\varepsilon, L^+(x_0))$ периодической траектории $L^+(x_0)$ так, чтобы

$$\begin{gathered} U(\varepsilon, L^+(x_0), t_1) \cap U(\varepsilon, L^+(x_0), t_2) = \emptyset, \\ \forall t_1 \neq t_2, \qquad t_1 \in [0, T), \qquad t_2 \in [0, T), \end{gathered} \tag{2.3}$$

где

$$U(\varepsilon, L^+(x_0), t) = \{y \big| |y - x(t, x_0)| \leq \varepsilon, \ (y - x(t, x_0))^* f(x(t, x_0)) = 0\}.$$

По ε выберем δ так, чтобы из неравенства $|x_0 - y_0| \leq \delta$ следовало соотношение

$$x(t, y_0) \in U(\varepsilon, L^+(x_0)), \qquad \forall t \geq 0.$$

Не умаляя общности можно считать, что $y_0 \in U(\varepsilon, L^+(x_0), 0)$. Тогда из соотношения (2.3) следует, что можно определить перепараметризацию $\tau(t)$ траектории $x(t, y_0)$ следующим образом

$$x(\tau(t), y_0) \in U(\varepsilon, L^+(x_0), t).$$

Ясно, что $\tau(\cdot) \in Hom$ и выполнено неравенство

$$|x(\tau(t), y_0) - x(t, x_0)| \leq \varepsilon, \quad t \geq t_0.$$

Последнее означает устойчивость по Жуковскому. □

Аналогично доказывается эквивалентность асимптотической устойчивости по Жуковскому и по Пуанкаре. В этом случае хорошо известна [11] специальная перепараметризация $\tau(t) = t + c$ называемая асимптотической фазой.

Хорошо известны примеры периодических траекторий непрерывных систем, которые не устойчивы по Ляпунову, но устойчивы по Пуанкаре.

Приведём один из таких примеров.

Пример 2.1. Рассмотрим уравнение Дуффинга

$$\ddot{x} + x + x^3 = 0$$

или эквивалентную ему двумерную систему

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -x - x^3. \tag{2.4}$$

Легко видеть, что все решения системы (2.4) периодичны и удовлетворяют соотношению

$$y(t)^2 + x(t)^2 + \frac{1}{2}x(t)^4 \equiv y_0^2 + x_0^2 + \frac{1}{2}x_0^4 \tag{2.5}$$

Здесь $y_0 = y(0)$, $x_0 = x(0)$. В дальнейшем, не умаляя общности, будем считать, что $y_0 = y(0)$. Последнее возможно, поскольку любая периодическая траектория системы (2.4) проходит в некоторый момент времени через точку с координатой $y = 0$ (рис. 2.1).

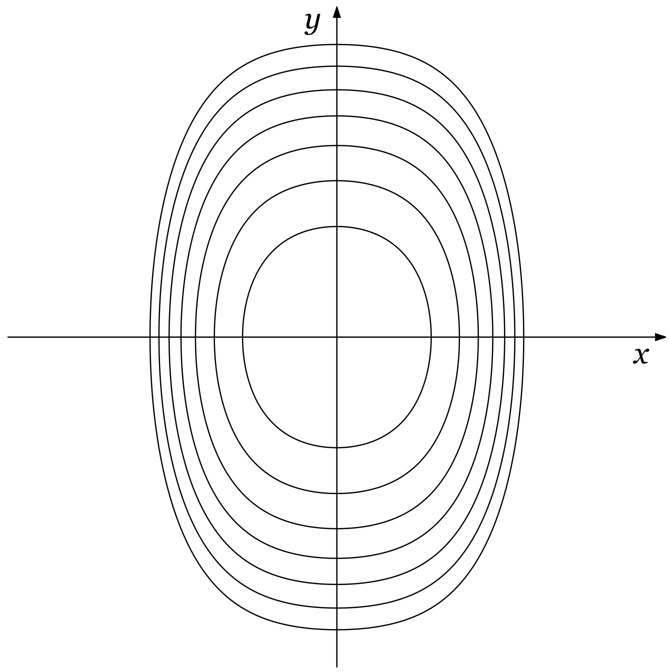

Рис. 2.1

На рисунке 2.1 траектории системы (2.4) — это графики функции $y(x) = \pm\sqrt{c - x^2 - \frac{1}{2}x^4}$, где параметр c принимает положительные значения.

Обозначим через $T(x_0)$ период решения, проходящего через точку $y = 0,\ x = x_0$.

Из соотношений (2.4) и (2.5) получим, что в полуплоскости $\{y \geq 0\}$ выполнено равенство

$$\frac{dt}{dx} = (x_0^2 + \frac{1}{2}x_0^4 - x^2 - \frac{1}{2}x^4)^{-1/2}.$$

Отсюда и из равенства $x(T(x_0)/2) = -x_0$ (см. рис. 2.1) получим формулу для периода $T(x_0)$:

$$T(x_0) = 2\int\limits_{-x_0}^{x_0} (x_0^2 + \frac{1}{2}x_0^4 - x^2 - \frac{1}{2}x^4)^{-1/2}dx. \qquad (2.6)$$

В отличие от линейной системы

$$\dot{x} = y, \ \dot{y} = -x, \tag{2.7}$$

где период решения с начальными данными $y = 0, \ x = x_0$ не зависит от x_0 и равен 2π :

$$T(x_0) = 2 \int\limits_{-x_0}^{x_0} (x_0^2 - x^2)^{-1/2} dx \equiv 2\pi,$$

период $T(x_0)$ решения системы (2.4), вычесленный по формуле (2.6) зависит от x_0.

График $T(x_0)$ изображен на рисунке 2.2.

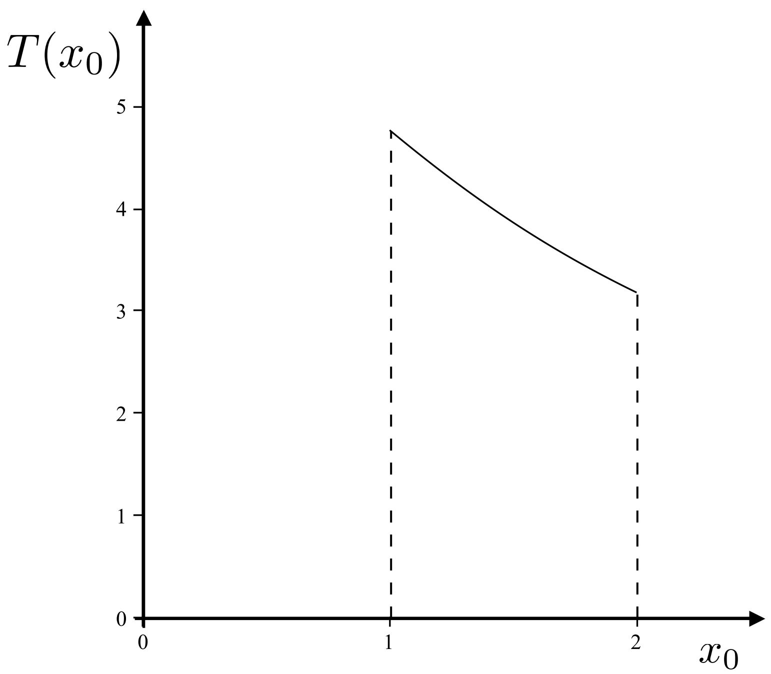

Рис. 2.2

Из соотношения (2.5) следует, что при малых изменениях начальных данных траектории системы (2.4) целиком остаются в малых окрестностях друг друга и, следовательно, являются устойчивыми по Пуанкаре. Поскольку все рассматриваемые траектории периодичны, то они устойчивы по Жуковскому (Предл. 2.5).

Однако здесь нет устойчивости по Ляпунова в отличие от траекторий системы (2.7). Это следует из следующих соображений. Если рассмотреть решения системы (2.4) с начальными данными $x = x_0,\ y = 0$ и $x = x_1,\ y = 0,$ где $x_0 - x_1 = \delta$ и δ мало, то можно подобрать натуральное число $\mathcal{N}$ так, чтобы $|\mathcal{N}(T(x_0) - T(x_1))|$ было близко к $T(x_1)/2.$ Отсюда следует, что $x(\mathcal{N}T(x_0), x_1)$ близко к значению $-x_1$.

Из приведённых здесь рассуждений следует, что решение $x(t, x_0)$ не является устойчивым по Ляпунову: для малых $x_0 - x_1$ разность $|x(\mathcal{N}T(x_0), x_0) - x(\mathcal{N}T(x_0), x_1)$ близка к $2|x_0|$.

3. Чувствительность траекторий к начальным данным и основные понятия неустойчивости

Перейдем теперь к сравнению приведенных выше определений и эффекта чувствительности траекторий по отношению к начальным данным на странных аттракторах.

Как было только что показано в примере 2.1 для периодических траекторий непрерывных динамических систем возможна устойчивость по Пуанкаре и по Жуковскому и в тоже время неустойчивость по Ляпунову. Таким образом, неустойчивость по Ляпунову не может характеризовать "отталкивание" друг от друга непрерывных траекторий при малых вариациях начальных данных.

Оказывается, что и неустойчивость по Пуанкаре не может характеризовать "отталкивание" траекторий друг от друга, но уже по другой причине. Здесь возмущённое решение может выходить из ε-окрестности некоторого куска невозмущённой траектории (эффект отталкивания), но одновременно это решение может входить в ε-окрестность другого куска невозмущённой траектории (свойство устойчивости по Пуанкаре). Таким образом, отталкивающиеся друг от друга траектории могут быть устойчивыми по Пуанкаре.

Рассмотрим более подробно эти эффекты.

В компьютерных экспериментах часто оказывается, что траектории, находящиеся на неустойчивом многообразии седловой особой точки всюду плотно заполняют B-аттрактор (или его часть, состоящую из ограниченных траекторий). Это наблюдается на B-аттракторе системы Лоренца [12]

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\sigma(x-y) \\ \dot{y} &= rx - y - xz \\ \dot{z} &= -bz + xy, \end{aligned} \tag{3.1}$$

где $\sigma = 10,\ r = 28,\ b = 8/3$ (рисунки 3.1, 3.2).

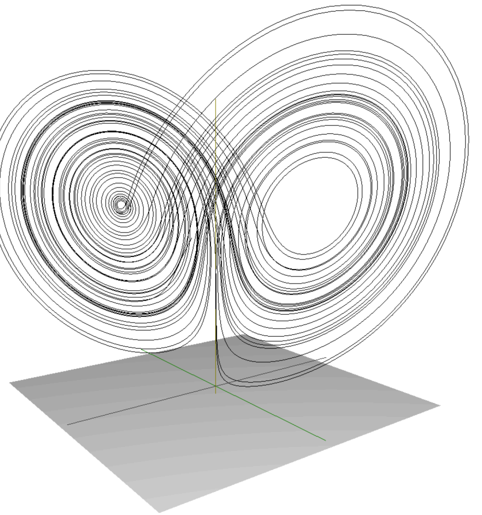

Рис. 3.1. *Неустойчивое многообразие седла системы Лоренца. Первые пятьдесят оборотов.*

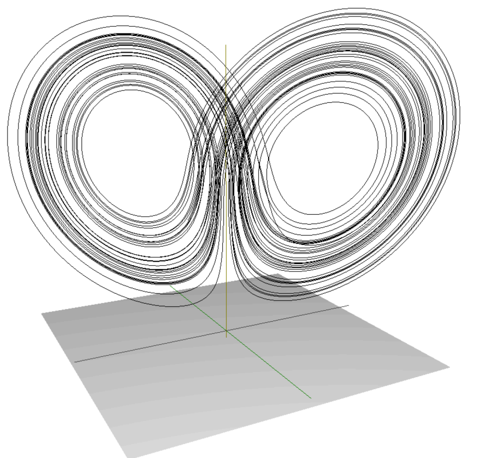

Рис. 3.2. *Неустойчивое многообразие седла системы Лоренца. Следующие пятьдесят оборотов.*

Аналогичная ситуация имеет место для системы Хенона [13]

$$\begin{aligned} x(t+1) &= a + by(t) - x(t)^2 \\ y(t+1) &= x(t), \end{aligned} \tag{3.2}$$

где $a = 1{,}4$, $b = 0{,}3$ (рис. 3.3).

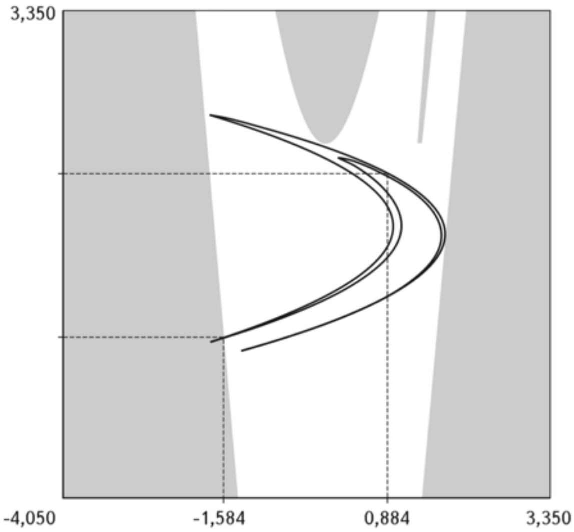

Рис. 3.3. *Неустойчивое многообразие седла системы Хенона.*

Затемненная часть квадрата — начальны данные, при которых траектории стремятся к бесконечности.

Таким образом для этих систем

$$\rho(L^{+}(x_0), x(t, y_0)) \equiv 0, \tag{3.3}$$

$\forall x_0 \in M,\ y_0 \in K,\ \forall t \geq 0$. Здесь M — неустойчивое многообразие седла, K– упомянутый выше B-аттрактор (или его часть, состоящая из ограниченных траекторий).

Из соотношения (2.6) следует, что на аттракторе K траектории $x(t, x_0)$ асимптотически устойчивы по Пуанкаре. Последнее означает, что неустойчивость по Пуанкаре не может характеризовать чувствительность по отношению к начальным данным на странных аттракторах.

Приведём теперь аналогичные примеры, носящие аналитический характер.

Пример 3.1. Рассмотрим линеаризованные уравнения двух несвязных маятников

$$\begin{aligned} \dot{x_1} = y_1,\ \dot{y_1} = -\omega_1^2 x_1, \\ \dot{x_2} = y_2,\ \dot{y_2} = -\omega_2^2 x_2. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Решениями этих уравнения являются функции

$$\begin{aligned}
x_1(t) &= A\sin(\omega_1 t + \varphi_1(0)),\\
y_1(t) &= A\omega_1\cos(\omega_1 t + \varphi_1(0)),\\
x_2(t) &= B\sin(\omega_2 t + \varphi_2(0)),\\
y_2(t) &= B\omega_2\cos(\omega_1 t + \varphi_2(0)).
\end{aligned}$$

При фиксированных A и B траектории системы (3.4) расположены на двумерных торах

$$\omega_1^2 x_1^2 + y_1^2 = A^2, \qquad \omega_2^2 x_2^2 + y_2^2 = B^2. \tag{3.5}$$

В том случае, когда число ω_1/ω_2 является иррациональным, при любых начальных условиях $\varphi_1(0)$ и $\varphi_2(0)$ траектории системы (3.4) всюду плотно расположены на торах (3.5).

Таким образом, при иррациональном ω_1/ω_2 для любых точек $x_0 \in \mathbb{R}^4$, $y_0 \in \mathbb{R}^4$, расположенных на торе (3.5), справедливо равенство (3.3). Отсюда следует асимптотическая устойчивость по Пуанкаре траекторий динамической системы с фазовым пространством (3.5). Однако движение точек $x(t, x_0)$ и $x(t, y_0)$ вдоль траекторий происходит так, что они не стремятся друг к другу при $t \to +\infty$. Нет "прижимания" друг к другу и траекторий. Следовательно, наше интуитивное представление об асимптотической устойчивости, как о процессе сходимости объектов друг к другу, противоречит формальному определению Пуанкаре. Легко видеть, что аналогичного эффекта нет для понятия устойчивости по Жуковскому: в рассматриваемом случае асимптотическая устойчивость по Жуковскому не имеет места.

Пример 3.2. Вновь рассмотрим динамическую систему (3.4) с иррациональным ω_1/ω_2. Изменим здесь поток траекторий на торе следующим образом. Произведём разрез поверхности тора вдоль некоторого куска фиксированной траектории от точки z_1 до точки z_2 (рис. 3.4).

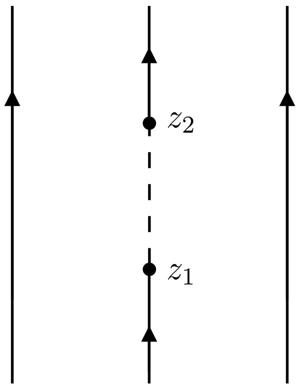

Рис. 3.4

Далее диффеоморфно растянем рассматриваемую поверхность вдоль тора так, чтобы разрез преобразовался в окружность с фиксированными точками z_1 и z_2 (рис. 3.5).

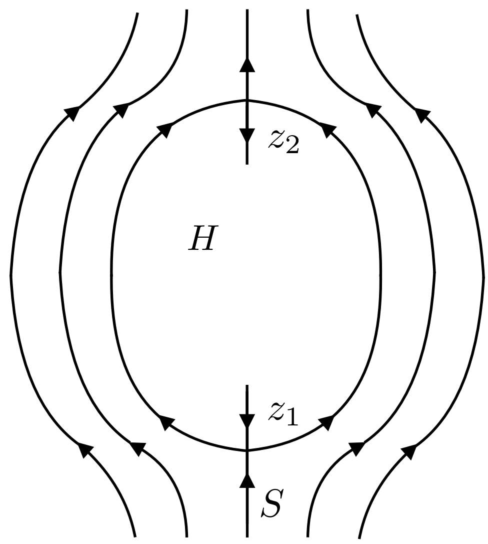

Рис. 3.5

Внутренность окружности обозначим через H.

Изменим нашу динамическую систему так, чтобы z_1 и z_2 стали седловыми стационарными точками, а полуокружности, соединяющие z_1 и z_2, — гетероклиническими траекториями, стремящимися при $t \to +\infty$ и $t \to -\infty$ соответственно к z_2 и z_1 (рис. 3.5).

Вне "дырки" H оставляем прежним расположение траекторий на торе, которое получилось после диффеоморфного растягивания.

Рассмотрим теперь поведение траекторий полученной здесь системы с точки зрения Пуанкаре и Жуковского.

Вне дырки H траектории всюду плотны на торе и поэтому, как было показано ранее, они асимптотически устойчивы по Пуанкаре.

Рассмотрим теперь некоторую δ-окрестность точки z_0, расположенной на торе и вне множества H. Траектория, выпущенная из точки z_0, либо всюду плотна, либо совпадает с сепаратрисой S седла z_1, стремящейся к z_1 при $t \to +\infty$ (рис. 3.5). Поэтому существует момент времени t, когда часть траекторий, выпущенных из δ-окрестности z_0 будут находиться в малой окрестности точки z_1 и справа от сепаратрисы S. Другая же часть траекторий, выпущенных из этой окрестности z_0 будут в момент времени t находиться слева от сепаратрисы S. Ясно, что после этого траектории, расположенные справа и слева от сепаратрисы S, будут огибать "дырку" H соответственно справа и слева. Но тогда ясно, что при таком огибали траектории будут отталкиваться друг от друга и, следовательно, траектория, выпущенная из точки z_0 будет неустойчива по Жуковскому.

Таким образом, траектория может быть асимптотически устойчива по Пуанкаре и неустойчива по Жуковскому.

В этом примере траектории чувствительны по отношению к начальным данным и могут расходиться друг от друга в некоторые моменты времени на значительные расстояния. Понятие неустойчивости по Жуковскому адекватно такой чувствительности.

Заметим, что множество таких чувствительных траекторий расположено на гладком многообразии "тор минус дырка H". Таким образом, ограниченное, инвариантное множество траекторий, чувствительных по отношению к начальным данным не всегда имеет нецелую хаусдорфову размерность или структуру канторовского множества.

Из сказанного выше можно сделать вывод о том, что среди классических понятий неустойчивости для дальнейшего изучения странных аттракторов наиболее адекватны неустойчивость по Жуковскому (в непрерывном случае) и неустойчивость по Ляпунову (в дискретном случае).

Элементы теории устойчивости по первому приближению в смысле Жуковского развивались в [14, 15].

Недавно был получен следующий замечательный результат [16]. ω-предельное множество асимптотически устойчивой по Жуковскому траектории состоит из периодической траектории.

Таким образом, предельные множества асимптотически устойчивых по Жуковскому траекторий устроены достаточно просто. С другой стороны, как было показано выше, неустойчивость по Жуковскому может быть одной из характеристик странных аттракторов.

4. Сведение задачи к исследованию нулевого решения

Первая процедура, которая применяется чаще всего [17] при исследовании устойчивости (или неустойчивости) решения $x(t, t_0, x_0)$ системы (1.4) является следующее преобразование $x = y + x(t, t_0, x_0)$. После такой замены получим следующее уравнение

$$\frac{dy}{dx} = F(y + x(t, t_0, x_0), t) - F(x(t, t_0, x_0), t), \qquad (4.1)$$

которое часто называют дифференциальным уравнением возмущенного движения. Очевидно, что задача об исследовании устойчивости решения $x(t, t_0, x_0)$ преобразуется в задачу об исследовании устойчивости тривиального решения $y(t) \equiv 0$ уравнения (4.1).

При этом считают, что правая часть (4.1) известна, поскольку известны $F(x, t)$ и решение $x(t, t_0, x_0)$. В настоящее время трудности вычисления $x(t, t_0, x_0)$ часто преодолеваются с помощью численных методов и проведения компьютерных экспериментов.

При исследовании устойчивости по Красовскому и экспоненциальной устойчивости поступают аналогичным образом. Устойчивость по Жуковскому есть ничто иное как устойчивость по Ляпунову перепараметризованных траекторий. Поэтому для исследования устойчивости по Жуковскому есть возможность применить методы и приёмы, разработанные для изучения ляпуновской устойчивости.

Заключение

В этой работе были приведены основные определения устойчивости, и рассмотрена взаимосвязь основных понятий теории устойчивости и неустойчивости, а также показана чувствительность траекторий к начальным данным. Для неё наиболее адекватны неустойчивость по Жуковскому (в непрерывном случае) и неустойчивость по Ляпунову (для дискретных динамических систем).

Список литературы

1. Ляпунов А.М. Общая задача об устойчивости движения. Харьков, 1892, 250 с.

2. Анищенко В.С. Сложные колебания в простых системах. М., Наука, 1990, 311 с.

3. Fradkov A.L., Pogromsky A.Y. Introduction to Control of Oscillation and Chaos. World Scientific. Singapore, 1998, 390 p.

4. Жуковский Н.Е. О прочности движения. Собрание сочинений. Т.1. М., Гостехиздат, 1948, с. 67–160.

5. Жуковский Н.Е. О прочности движения // Ученые записки Московского университета. Отд. физ.-мат. 1882, вып. 4, с. 1 104.

6. Ляпунов А.М. Об устойчивости движения в одном частном случае задачи о трех телах // Сообщения Харьковского Матем. Об-ва, 2 серия, 1889.

7. Биркгоф Дж. Динамические системы. М.: Гостехиздат, 1941.

8. Пуанкаре А. О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями. М.-JL: ГТТИ, 1947.

9. Пуанкаре А. Избранные труды. Т. 1,2.- М.: Наука, 1971, 1972.

10. Ладыженская О.А. О нахождении минимальных глобальных аттракторов для уравнений Навье-Стокса и других уравнений с частными производными. УМН, 1987, т. 42, вып. 6, с. 25–60.

11. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. М., Наука, 1967, 472 с.

12. Странные аттракторы. Сборник статей. Под редакцией Я.Г. Синая и Л.П. Шильникова. Математика. Новое в зарубежной науке N 22. М., Мир, 1981, 253 с.

13. Леонов Г.А., Полтинникова М.С. О ляпуновской размерности аттрактора диссипативного отображения Чирикова. Труды Санкт-Петербургского математического общества, 2002, т. 10, с. 186–198.

14. Леонов Г.А. Об устойчивости по первому приближению. ПММ, 1998, т.69, вып.4, с. 548– 555.

15. Дунаева О.В. Признаки асимптотической прочности и непрочности движения динамической системы. Докл. АН, 1997, т. 315, N4, с. 476–478.

16. Yang X. Lyapunov Asymptotically Stability and Zhukovskij Asymptotically Stability. Chaos, Solutions and Fractals, 2000, N 11, p. 1995–1999.

17. Малкин И.Г. Теория устойчивости движения. М., Наука, 1966, 525 с.

18. Четаев Н.Г. Устойчивость движения. М., Гостехиздат, 1955, 207 с.

19. Далецкий Ю.Л., Крейн М.Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М., Наука, 1970, 534 с.

20. Леонов Г.А. Странные аттракторы и классическая теория устойчивости движения. Успехи механики. 2002, т.1, N 3, с. 3–42.